1.34) Menor subespacio $\rightarrow S_1 + S_2$

Mayor subespacio $\rightarrow S_1 \cap S_2$.

a) $S_1 = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$S_2 = \left\{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}\right\}$

Busco mayor subespacio que los contiene:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}\right\}$$

Trabajo con el sist. de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \mathrm{I} \\ x_1 + x_2 = 0 & \mathrm{II} \\ x_3 - 2x_4 = 0 & \mathrm{III} \end{cases}$$

de III $\rightarrow x_3 = 2x_4$

en I $\rightarrow x_2 + 2x_4 + x_4 = 0 \rightarrow x_2 = -3x_4$

en II $\rightarrow x_1 = 3x_4$

Por lo tanto un $\bar{x}$ que cumpla será de la forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_4, -3x_4, 2x_4, x_4) = x_4 \cdot (3, -3, 2, 1)$$

Por lo tanto $\boxed{\text{una base de } S_1 \cap S_2 \text{ es } \{(3,-3,2,1)\}}$

Ahora busco menor subespacio que los contiene:
Puedo unir el ~~generador~~ conj. de generadores de S_1 con el de S_2 y me dará un conj. de generadores de S_1+S_2.

Busco Conj. de gen. de S_1:

$x_2+x_3+x_4=0 \to x_2=-x_3-x_4$

Entonces un $\bar{x}$ que cumpla $\to \bar{x}=(x_1,-x_3-x_4,x_3,x_4) \to$

$\to \bar{x}=x_1.(1,0,0,0)+x_3.(0,-1,1,0)+x_4.(0,-1,0,1)$

Entonces $\to$ $S_1=\text{gen}\{(1,0,0,0),(0,-1,1,0),(0,-1,0,1)\}$

Busco conj. gen. de S_2:

$\begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3=2x_4 \end{cases}$ $\to$ un $\bar{x}$ q'cumpla $\to \bar{x}=(-x_2,x_2,2x_4,x_4) \to$

$\to \bar{x}=x_2.(-1,1,0,0)+x_4.(0,0,2,1)$

Entonces $\to S_2=\text{gen}\{(-1,1,0,0),(0,0,2,1)\}$

$S_1+S_2=\text{gen}\{\underbrace{(1,0,0,0)}_{v_1},\underbrace{(0,-1,1,0)}_{v_2},\underbrace{(0,-1,0,1)}_{v_3},\underbrace{(-1,1,0,0)}_{v_4},\underbrace{(0,0,2,1)}_{v_5}\}$

Busco base:

$$\begin{array}{c} v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\\-1&1&0&0\\0&0&2&1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_3\to F_2-F_3\\F_4\to F_1+F_4 \end{array} \begin{array}{c} v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&2&1 \end{pmatrix} F_4\to F_2+F_4 \begin{array}{c} v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&2&1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_4\to F_3-F_4\\F_5\to 2F_3-F_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&-1\\0&0&0&-3 \end{pmatrix}$$

Claramente v_5 es múltiplo de v_4, si lo elimino, los demás son LI.

Por lo tanto una base de S_1+S_2 es: $\{v_1,v_2,v_3,v_4\} \to$

$$\to \boxed{=\{(1,0,0,0),(0,-1,1,0),(0,-1,0,1),(-1,1,0,0)\}}$$

b) $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

$\quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5$

$S_1 = \text{gen}\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$

$S_2 = Nul(A)$

Busco Nul(A)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_1 - F_3 \\ F_4 \to F_1 - F_4 \\ F_5 \to F_1 - F_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 \to F_2 - F_3 \\ F_4 \to F_2 - F_4 \\ F_5 \to F_2 - F_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ F_5 \to F_4 - F_5 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Como la 4ta fila es múltiplo de la 3ra, también la saco.

$*$

Ec.:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \to x_1 + 3x_3 - 2x_5 = 0 \to x_1 = -3x_3 + 2x_5 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \to x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \to x_2 = 2x_3 - x_5 \\ -x_4 + x_5 = 0 \to x_4 = x_5 \end{cases}$$

Entonces $\bar{x}$ que cumple $\to \bar{x} = x_3.(-3,2,1,0,0) + x_5.(2,-1,0,1,1)$

Por lo tanto $Nul(A) = \text{gen}\{(-3,2,1,0,0),(2,-1,0,1,1)\}$

$\to S_2 = \text{gen}\{(-3,2,1,0,0),(2,-1,0,1,1)\}$

Busco mayor subespacio que los contiene.

Primero busco bases de S_1 y de S_2.

de S_2, una base es $= \underbrace{\{(-3,2,1,0,0),(2,-1,0,1,1)\}}_{B_{S_2}}$ ya que no son múltiplos.

Para hallar base de S_1, aplico elim. Gaussiana.

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & -5 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2 \to F_1+F_2 \\ F_3 \to F_1+F_3 \\ F_4 \to 2F_1-F_4 \\ F_5 \to F_1+F_5 \end{array} \quad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F_3 \to 2F_2+F_3 \\ F_4 \to 2F_2+F_4 \\ F_5 \to F_2+F_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ F_4 \to F_3-F_4 \end{array} \quad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto una base de S_1 es $\to \{v_1, v_2, v_4\} \to$

$\to = \{(-1,-1,-1,-1,-1),(1,0,0,0,0),(-2,-4,-5,-6,-6)\} = B_{S_1}$

Para $S_1 \cap S_2$ (mayor s.e. que los contiene):

$$\underbrace{\alpha_1.(-1,-1,-1,-1,-1)+\alpha_2.(1,0,0,0,0)+\alpha_3.(-2,-4,-5,-6,-6)}_{\text{CL de } B_{S1}} = \underbrace{\alpha_4.(-3,2,1,0,0)+\alpha_5.(2,-1,0,1,1)}_{\text{CL de } B_{S2}} \quad \Delta$$

Ecuaciones:

$$\begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 = -3\alpha_4+2\alpha_5 & \text{I} \\ -\alpha_1-4\alpha_3 = 2\alpha_4-\alpha_5 & \text{II} \\ -\alpha_1-5\alpha_3 = \alpha_4 & \text{III} \\ -\alpha_1-6\alpha_3 = \alpha_5 & \text{IV} \\ -\alpha_1-6\alpha_3 = \alpha_5 & \text{V} \end{cases}$$

V $\rightarrow \alpha_1 = -6\alpha_3-\alpha_5 \rightarrow \alpha_1 = -6\alpha_4+6\alpha_5-\alpha_5 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = -6\alpha_4+5\alpha_5}$

en IV $\rightarrow 6\alpha_3-6\alpha_3+\alpha_5=\alpha_5$ ✓

en III $\rightarrow 6\alpha_3+\alpha_5-5\alpha_3=\alpha_4 \rightarrow \boxed{\alpha_3=\alpha_4-\alpha_5}$

en II $\rightarrow 6\alpha_3+\alpha_5-4\alpha_4+4\alpha_5 = 2\alpha_4-\alpha_5 \rightarrow$

$\rightarrow 6\alpha_4-6\alpha_5+\alpha_5-4\alpha_4+4\alpha_5 = 2\alpha_4-\alpha_5 \rightarrow$

$\rightarrow 0=0$ ✓.

en I $\rightarrow 6\alpha_3+\alpha_5+\alpha_2-2\alpha_4+2\alpha_5 = -3\alpha_4+2\alpha_5$.

$\rightarrow 6\alpha_4-6\alpha_5+\alpha_5+\alpha_2-2\alpha_4+2\alpha_5+3\alpha_4-2\alpha_5=0 \rightarrow$

$\rightarrow 7\alpha_4-5\alpha_5+\alpha_2=0 \rightarrow \boxed{\alpha_2=-7\alpha_4+5\alpha_5}$

Reemplazando en alguno de los lados de Δ (elijo derecho), veo que queda igual. Por lo que una base de $S1 \cap S2$ es la misma ~~generador~~ base de $S2$ (B_{S2}),

$\rightarrow \boxed{B_{S1\cap S2} = \{(-3,2,1,0,0),(2,-1,0,1,1)\}}$

Busco base de $S_1 + S_2$ (menor s.e. que los contiene).

Uno las bases de c/u

$$S_1 + S_2 = \text{gen}\{\underbrace{(-1,-1,-1,-1,-1)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,0,0,0)}_{v_2}, \underbrace{(-2,-4,-5,-6,-6)}_{v_3}, \underbrace{(-3,2,1,0,0)}_{v_4}, \underbrace{(2,-1,0,1,1)}_{v_5}\}$$

~~De~~ Busco base por elim. gaussiana:

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -5 & -6 & -6 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2 \to F_1 + F_2 \\ F_3 \to 2F_1 - F_3 \\ F_4 \to 3F_1 - F_4 \\ F_5 \to 2F_1 + F_5 \end{array} \sim \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F_3 \to 2F_2 + F_3 \\ F_4 \to 5F_2 - F_4 \\ F_5 \to 3F_2 - F_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ F_4 \to F_3 + F_4 \\ F_5 \to F_3 + F_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto una base de $S_1 + S_2$ es:

$$\boxed{B_{S_1+S_2} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(-1,-1,-1,-1,-1), (1,0,0,0,0), (-2,-4,-5,-6,-6)\}}$$

c) Para S_1+S_2 junto los gen.

$$S_1+S_2 = \text{gen}\{\underbrace{(1,0,2,1)}_{v_1},\underbrace{(1,1,1,1)}_{v_2},\underbrace{(4,2,2,0)}_{v_3},\underbrace{(2,0,2,0)}_{v_4}\}$$

Los dos gen (de S_1 y S_2) son bases.

~~Veo si~~ Busco base por elim. Gaussiana:

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to 4F_1 - F_3 \\ F_4 \to 2F_1 - F_4 \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} F_3 \to 2F_2 - F_3 \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} F_4 \to F_3 + 2F_4$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\boxed{B_{S_1+S_2} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,0,2,1),(1,1,1,1),(4,2,2,0)\}}$

Para $S_1 \cap S_2$

$$\to \overbrace{\alpha_1.(1,0,2,1)+\alpha_2.(1,1,1,1)}^{\text{cc de } S_1} = \overbrace{\alpha_3.(4,2,2,0)+\alpha_4.(2,0,2,0)}^{\text{cc de } S_2.} \quad (\Delta)$$

Ec.:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 4\alpha_3+2\alpha_4 & (\mathrm{I}) \\ \alpha_2 = 2\alpha_3 & (\mathrm{II}) \\ 2\alpha_1+\alpha_2 = 2\alpha_3+2\alpha_4 & (\mathrm{III}) \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 & (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

de (IV) $\to \alpha_1 = -\alpha_2 \to \boxed{\alpha_1 = \alpha_4}$

em (III) $\to \alpha_2 = -2\alpha_3 - 2\alpha_4 \to \alpha_2 = -2\cdot -\frac{1}{2}\alpha_4 - 2\alpha_4 \to \boxed{\alpha_2 = -\alpha_4}$

em (II) $\to -2\alpha_3 - 2\alpha_4 = 2\alpha_3 \to -4\alpha_3 = 2\alpha_4 \to \boxed{\alpha_3 = -\frac{1}{2}\alpha_4.}$

~~em (I) → 3α4 − 3α4 = 4·½α4 + 2α4 → 0 =~~

em (I) $\to \alpha_4 - \alpha_4 = 4\cdot -\frac{1}{2}\alpha_4 + 2\alpha_4 \to 0=0$ ✓

Reemplazo en el lado derecho de (Δ)

$$v = -\frac{1}{2}\alpha_4.(4,2,2,0)+\alpha_4.(2,0,2,0) \to v = \alpha_4.\left((-2,-1,-1,0)+(2,0,2,0)\right)$$

$\to v = \alpha_4.(0,-1,1,0)$ por lo tanto $\boxed{B_{S_1 \cap S_2} = \{(0,-1,1,0)\}}$

y se cumple el teorema:

$$\underbrace{\dim(S_1+S_2)}_{3} = \underbrace{\dim(S_1)}_{2} + \underbrace{\dim(S_2)}_{2} - \underbrace{\dim(S_1 \cap S_2)}_{1}$$

$3 = 2+2-1 \to 3=3$ ✓